

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA  
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

*Marco Longinetti*

**PROPRIA CONVESSITA' DI LINEE DI LIVELLO  
MINIMANTI FUNZIONALI**

2 aprile 1992

## Propria convessità di linee di livello minimanti funzionali.

### 0.1 Introduzione

Sia  $\Omega$  un aperto limitato e convesso di  $\mathbf{R}^2$ . Si considera nella classe  $W_0^{1,p}(\Omega)$  per  $p > 1$  il funzionale:

$$F(u) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx}{\int_{\Omega} u^p dx}. \quad (0.1)$$

nella classe  $W_0^{1,p}(\Omega)$  per  $p > 1$ .

Il Funzionale  $F$  ammette minimo in tale classe e la funzione minimante  $v$  è soluzione del seguente problema di Dirichlet:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \cdot \nabla u) + \lambda u^{p-1} &= 0 \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ su } \delta\Omega \end{aligned} \quad (0.2)$$

**Teorema 1** *Se  $\Omega$  è convesso allora la funzione  $v$  minimante il funzionale (0.1) ha tutti gli insiemi di livello convessi.*

Una funzione che ha tutti gli insiemi di livello convessi si dice *quasi convessa*. Questo teorema può essere dimostrato come conseguenza del seguente risultato di Sakaguchi (1988):

$$w = \log |v|, \text{ risulta concava in } \Omega.$$

Nel caso  $p = 2$ , questo fatto era stato dimostrato anche da Brascamp e Lieb (1975), poi da Korevaar (1981); è essenzialmente la tecnica di Korevaar che Sakaguchi utilizza per provare la convessità di  $w$ . Riassunta brevemente questa consiste nel provare mediante un principio di massimo che la *funzione di convessità* definita in  $\Omega \times \Omega \times [0, 1]$ :

$$C(x, y, t) = w(tx + (1-t)y) - tw(x) - (1-t)w(y),$$

non può avere massimi positivi interni. Poichè per la convessità di  $\Omega$  la funzione  $C(x, y, t)$  diverge a  $-\infty$  se  $x$  oppure  $y$  tendono a punti di  $\delta\Omega$  allora risulta

$$C(x, y, t) \leq 0, \quad \forall (x, y, t) \in \Omega \times \Omega \times [0, 1],$$

pertanto  $w$  è concava.

Il metodo di risoluzione che qui riportiamo differisce sostanzialmente dalle tecniche usate nei lavori citati. Essò ci sembra interessante sia per alcune sue caratteristiche geometriche, sia per sue possibili collegamenti con problemi di frontiera libera, come [7],[8]. Inoltre la proprietà di quasi convessità di  $v$  risulta in generale meno esigente rispetto alla convessità della funzione  $w$  e pertanto estendibile a funzionali più generali del funzionale (0.1). Il metodo consiste nel considerare problemi approssimanti che evidenziano il ruolo delle linee di livello.

A tale scopo si consideri una funzione quasi convessa  $u$ , positiva in  $\Omega$ , nulla su  $\delta\Omega$ , nella classe  $C^1(\Omega)$ , e con massimo 1. Nel seguito questo si dice brevemente con l'espressione:  $u$  è **quasi convessa regolare**.

Siano  $u_i$  costanti reali per  $i = 0, 1, \dots, r$ , con :

$$u_i \leq u_{i+1}, \quad u_0 = 0, \quad u_r = 1; \quad (0.3)$$

e si considerino gli insiemi di livello convessi di  $u$  :

$$K_i = \{x \in \Omega : u(x) \geq u_i\}. \quad (0.4)$$

Nel seguito la coppia  $(K, U)$  indica la  $r$ -pla di insiemi convessi  $K_i$ , e la  $r$ -pla di numeri reali  $u_i$ . Chiamiamo anche tale coppia una  $r$ -stratificazione convessa. Sia  $x \in \delta K_i$  e sia  $t$  la retta tangente in  $x$  a  $\delta K_i$ , si indica con  $\sigma_i(x)$  la distanza di  $x$  dalla retta di supporto a  $\delta K_{i+1}$ , parallela e più prossima a  $t$ . Analogamente si indica con  $\eta_i(x)$  la distanza di  $x$  dalla retta di supporto a  $\delta K_{i-1}$ , parallela e più prossima a  $t$ , vedi figura 1.

Si considera ora un'approssimazione di  $|\nabla u|(x)$  mediante i rapporti incrementali:

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\eta_i(x)}, \quad \frac{u_{i+1} - u_i}{\sigma_i(x)}. \quad (0.5)$$

Tenuto conto della formula di coarea si ha che:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \int_0^{\max u} dt \int_{u=t} |\nabla u|^{p-1} ds \quad (0.6)$$

ed utilizzando in luogo di  $|\nabla u|$  le espressioni approssimanti (0.5), si può considerare la seguente espressione quale approssimante (0.6):

$$A_r(K, u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r (u_i - u_{i-1})^p \left[ \int_{\delta K_i} \frac{ds}{(\eta_i(x))^{p-1}} + \int_{\delta K_{i-1}} \frac{ds}{(\sigma_{i-1}(x))^{p-1}} \right]. \quad (0.7)$$

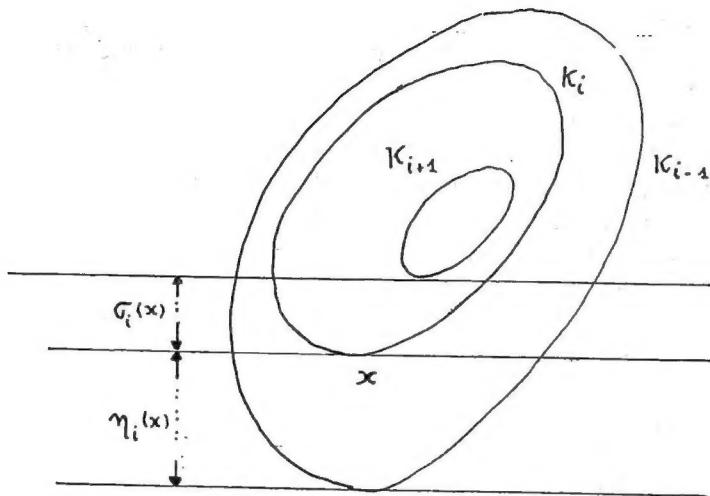


Figure 1: Stratificazione convessa.

Analogamente l'integrale  $\int_{\Omega} u^p dx$  viene approssimato da :

$$B_r(K, u) = \sum_{i=1}^{r-1} u^p \text{mis}(K_i - K_{i+1}) + \text{mis}K_r = \sum_{i=1}^r [u_i^p - u_{i-1}^p] \text{mis}K_i, \quad (0.8)$$

dove  $\text{mis}K_i$  indica la misura dell'insieme convesso  $K_i$ .

Si considera pertanto invece del funzionale (0.1) i funzionali approssimanti:

$$F_r(K, U) = \frac{A_r(K, U)}{B_r(K, U)}. \quad (0.9)$$

Si osserva facilmente che se  $u$  è quasiconvessa regolare nel senso sopradetto allora per  $r \rightarrow +\infty$  e  $\max\{(u_i - u_{i-1}) : i = 1, \dots, r\} \rightarrow 0$  si ha:

$$F_r(K, U) \rightarrow F(u).$$

Il seguente problema simula sul discreto il problema di trovare i minimanti del funzionale (0.1):

Sia  $C_r$  l'insieme delle  $(r+1)$ -ple di insiemi  $K = (K_0, K_1, \dots, K_r)$  dove :

a)  $K_0 = \bar{\Omega}$ ,

b)  $K_i$  è chiuso e convesso per  $i = 1, \dots, r$ ,

c)  $K_i \subset K_{i+1}$  per  $i = 0, \dots, r-1$ .

Sia  $U_r$  l'insieme delle  $(r+1)$ -ple di numeri reali  $U = (u_0, u_1, \dots, u_r)$ , dove:

d)  $u_0 = 0, \quad u_r = 1$  ;

e)  $u_i \leq u_{i+1}$  per  $i = 0, \dots, r-1$ .

La classe  $(C_r, U_r)$  è detta la classe delle  $r$ -stratificazioni convesse. Siano  $\eta_i(x)$  e  $\sigma_i(x)$  le distanze precedentemente definite; sia  $A_r(K, U)$  dato dalla (0.7) e  $B_r(K, U)$  dato dalla (0.8). Inoltre si conviene che, indipendentemente dalla divergenza a  $+\infty$  della funzione integranda :

$$\int_{\delta K_i} \frac{(u_i - u_{i-1})^p}{(\eta_i(x))^{p-1}} ds = \int_{\delta K_i} \frac{(u_{i+1} - u_i)^p}{(\sigma_i(x))^{p-1}} ds = 0 \quad \text{se } \text{mis} \delta K_i = 0, \quad (0.10)$$

$$\int_{\delta K_i} \frac{(u_i - u_{i-1})^p}{(\eta_i(x))^{p-1}} ds = \int_{\delta K_{i-1}} \frac{(u_i - u_{i-1})^p}{(\sigma_i(x))^{p-1}} ds = 0 \quad \text{se } u_i = u_{i-1}. \quad (0.11)$$

Il metodo che verrà seguito per provare il teorema 1 sopra enunciato si può schematizzare nei seguenti passi:

I) Si introduce nel §2 una rappresentazione del funzionale  $F_r(K, U)$  in termini delle funzioni supporto degli insiemi convessi e si prova nel §3 che  $F_r$  ha un minimo nella classe  $(C_r, U_r)$  delle stratificazioni convesse.

II) Si prova nel §3 che il punto di minimo in  $(C_r, U_r)$  di  $F_r$  è abbastanza "interno" alla classe considerata, in particolare le linee di livello  $\delta K_i$  di una stratificazione minimante non hanno punti a comune, e sono a livelli  $u_i$  distinti.

III) Si dimostra nel §4, mediante una variazione di tipo geometrico, che le linee di livello della stratificazione minimante sono dotate in ogni punto di retta tangente e soddisfano un'equazione di Eulero in forma debole.

IV) Mediante l'equazione di Eulero verificata dalle linee di livello, nel §5 si prova che tali linee sono propriamente convesse e di classe  $C^2$  se lo è  $\delta\Omega$ .

V) Nel §6, indicato con  $(K^{(r)}, U^{(r)})$  la stratificazione minimante  $F_r$  in  $(C_r, U_r)$  si considera una funzione quasi convessa  $\hat{u}^{(r)}$  associata a tale stratificazione. Si prova che esiste una successione estratta da  $\{\hat{u}^{(r)}\}$  convergente in  $\Omega$  ad una funzione quasi convessa  $\bar{v}$ .

VI) Utilizzando le equazioni di Eulero associate alle linee di livello delle  $\{\hat{u}^{(r)}\}$ , si perviene ad una equazione verificata dalle linee di livello di  $\bar{v}$ , che risulta essere l'equazione di Eulero in forma debole delle linee di livello

associata alla (2). Per l'unicità della soluzione di (2) se ne conclude che  $v = \bar{v}$  e quindi  $v$  è quasi convessa.

Il motivo che sta alla base del metodo precedentemente illustrato è il seguente:

Nel discreto la convessità delle linee è maggiormente intuitiva e riconducibile alla convessità di una funzione di una variabile, pertanto sembra più facilmente dimostrabile. Per il problema qui specificatamente trattato ciò è risultato vero.

Le difficoltà sorgono dall'essersi posti già nella classe di linee di livello convesse e quindi nella necessità di provare che il minimo è interno a tale classe, allo scopo di poter agilmente fare una prima variazione che generi l'equazione di Eulero.

Un ulteriore difficoltà consiste nel ritorno alla formulazione continua. Per poter agilmente eseguire questo passaggio al limite, occorrerebbe una limitazione a priori della convessità delle linee di livello, ad esempio che le curvature delle linee di livello delle stratificazioni minimanti sono uniformemente maggiori di una costante positiva. Se ciò fosse noto allora la funzione limite  $\bar{v}$  risulterebbe strettamente quasi convessa e quindi "interna" alla classe delle funzioni quasi convesse in  $W_0^{1,p}(\Omega)$  e minimante il funzionale (0.1) in tale sottoclasse. Questo sarebbe sufficiente per poter concludere che  $\bar{v}$  risolve l'equazione (2) e quindi è minimante il funzionale stesso su tutto  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Purtroppo l'unica limitazione di tale tipo è nota per la curvatura delle linee di livello di funzioni armoniche [8] o di autofunzioni del Laplaciano [2], mentre per il problema qui considerato non si conosce nessun risultato simile; anche con il modello discreto qui utilizzato non si riesce ad ottenere una tale informazione. Per la mancanza di un'informazione uniforme sulla curvatura delle linee di livello si è dovuto quindi utilizzare le equazioni di Eulero verificate dalle approssimanti e fare un passaggio al limite su queste per ottenere la (2).

Si ritiene infine che una rielaborazione di tale modello possa essere utilizzata per un approccio di tipo numerico al problema del minimo del funzionale  $F$ .

## 0.2 Funzione supporto

Dato un insieme convesso  $A \subset \mathbf{R}^2$  si definisce funzione supporto dell'insieme  $A$  la funzione:

$$\rho(u) = \sup \langle v, u \rangle, \quad v \in \mathbf{R}^2, \quad u \in \mathbf{R}^2.$$

Chiameremo anche funzione supporto di  $A$  la restrizione di  $\rho$  alla circonferenza unitaria, cioè la funzione:

$$h(\theta) = \rho(\cos \theta, \sin \theta).$$

Se  $r$  è una retta di supporto ad  $A$  avente come versore normale il vettore  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , l'equazione di  $r$  risulta data da:

$$x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta = h(\theta). \quad (0.12)$$

Scelto per centro delle coordinate un punto  $O$  interno ad  $A$  e indicato con  $H$  la proiezione di  $O$  su  $r$  risulta

$$h(\theta) = \overline{OH};$$

inoltre se la retta di supporto ha un unico punto di contatto  $T$  con  $\delta A$  cioè  $A$  è strettamente convesso, allora  $h$  risulta differenziabile in  $\theta$  e :

$$-x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) = h'(\theta) \quad (0.13)$$

da cui segue che

$$|h'(\theta)| = \overline{HT}. \quad (0.14)$$

Quindi se  $A$  è strettamente convesso ad ogni valore di  $\theta$  corrisponde un unico punto  $x = (x_1, x_2)$  con retta di supporto normale alla direzione  $\theta$ ; la relazione che lega  $\theta$  al punto  $x$  si ottiene invertendo il sistema (0.12), (0.13):

$$x_1 = h(\theta) \cos(\theta) - h'(\theta) \sin(\theta), \quad x_2 = h(\theta) \sin(\theta) + h'(\theta) \cos(\theta) \quad (0.15)$$

Derivando le precedenti rispetto a  $\theta$  si trova che l'elemento d'arco  $ds$  è dato da :

$$ds = ((dx_1)^2 + (dx_2)^2)^{1/2} = (h + h'')d\theta.$$

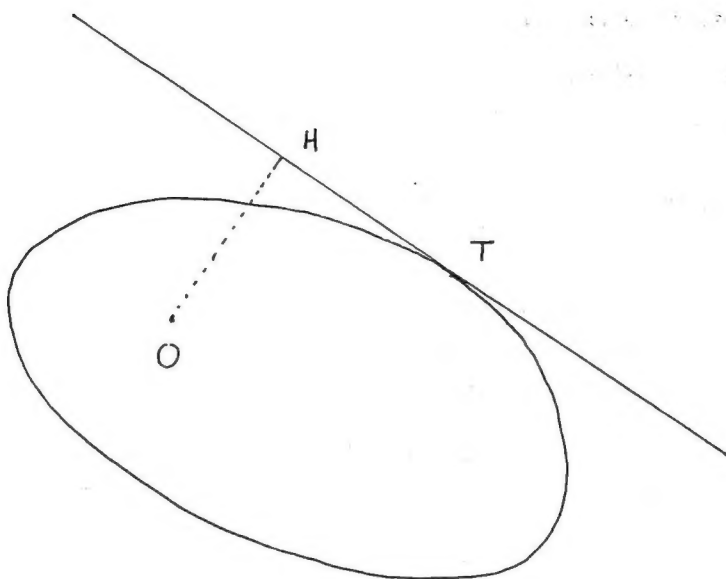


Figure 2: Funzione supporto.

Pertanto se  $h$  è differenziabile due volte rispetto all'angolo  $\theta$  la linea convessa  $\delta A$  ha raggio di curvatura dato da :

$$R(\theta) = h(\theta) + h''(\theta) \geq 0. \quad (0.16)$$

Dalle due formule precedenti segue che se  $\delta A$  è una linea convessa chiusa di classe  $C^2$  con curvatura positiva allora la funzione  $h$  è pure di classe  $C^2$ . Si hanno inoltre come conseguenza le seguenti formule:

$$mis A = \frac{1}{2} \int_{\delta A} (x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta) [h(\theta) d\theta + dh'(\theta)]; \quad (0.17)$$

e se  $f$  è una funzione continua su  $\delta A$  si ha:

$$\int_{\delta A} f ds = \int_{\delta A} f(h + h'') d\theta = \int_0^{2\pi} f(h d\theta + dh'). \quad (0.18)$$

Sussistono inoltre le seguenti proposizioni

**Proposizione 1** *Se una successione di corpi convessi  $A_n$  converge ad un corpo convesso  $A$  allora le funzioni supporto associate  $h_n$  convergono uniformemente a  $h$ .*



Per la dimostrazione si osservi che

$$\max\{|h_n(\theta) - h(\theta)|, \theta \in [0, 2\pi]\} \leq d(A_n, A),$$

e che la distanza di Hausdorff  $d(A_n, A)$  converge a zero per il teorema di Blasckhe .

**Proposizione 2** *Se  $A$  è un corpo convesso di  $\mathbf{R}^2$ , allora la sua funzione supporto  $h$  è dotata ovunque di derivata destra e sinistra;  $h'(\theta)$  esiste a meno di una infinità numerabile di punti, ha limite destro e sinistro finito in ogni punto ed è a variazione limitata.*

Infatti  $h$  è per la proposizione 1 limite uniforme di funzioni  $h_n$  verificanti la (0.16), esiste quindi per la limitatezza di  $h$  una costante  $c$  tale che le funzioni

$$h_n(\theta) + c \cdot \theta^2$$

sono convesse. Ne segue che è convessa la funzione limite:

$$h(\theta) + c \cdot \theta^2.$$

Per le proprietà di una funzione convessa si hanno tutti gli asserti della proposizione 2.

Come prima conseguenza della proposizione precedente si ha che le formule (0.17) e (0.18) continuano a sussistere come integrali di Stieltjes per ogni corpo convesso non necessariamente regolare.

Sono di interesse per il seguito le seguenti proposizioni

**Proposizione 3** *Se  $h$  non è derivabile nel valore  $\bar{\theta}$ , allora in corrispondenza di tale angolo esiste una retta di supporto  $r$  che stacca su  $\delta A$  un segmento  $S$  la cui lunghezza  $l$  è data da:*

$$l = h'_+(\bar{\theta}) - h'_-(\bar{\theta}).$$

La dimostrazione segue utilizzando la (0.14) per  $\theta < \bar{\theta}$  e per  $\theta > \bar{\theta}$ , e passando al limite.

**Proposizione 4** *Se per  $x \in \delta A$  passano due rette di supporto distinte, cioè  $x$  è un punto di spigolo per  $\delta A$  allora la funzione raggio di curvatura risulta zero in un intervallo, cioè*

$$\frac{ds}{d\theta} = R(\theta) = 0, \quad \theta \in (\theta_1, \theta_2) \quad (0.19)$$

Si consideri ora la classe  $(C_r, U_r)$  delle stratificazioni convesse sopra definite. Siano  $\eta_i(x), \sigma_i(x)$  le distanze sopra definite di un punto  $x \in \delta K_i$  dalle rette di supporto della linea precedente e successiva, parallele alla retta di supporto a  $\delta K_i$  in  $x$ . Siano  $h_i(\theta)$  sono le funzioni supporto associate agli insiemi  $K_i$ ; per quasi tutti i punti di  $\delta K_i$  (esclusi i punti spigolosi) esiste univocamente determinata un direzione normale esterna  $(\cos \theta, \sin \theta)$  e per questi punti  $x$  si ha :

$$\eta_i(x) = |h_{i-1}(\theta) - h_i(\theta)|, \quad \sigma_i(x) = |h_i(\theta) - h_{i+1}(\theta)|. \quad (0.20)$$

come conseguenza delle (0.18), (0.19) e (0.20) si ha :

$$\int_{\delta K_i} \frac{ds}{(\eta_i(x))^{p-1}} = \int_0^{2\pi} \frac{h_i d\theta + dh'_i}{|h_{i-1} - h_i|^{p-1}}$$

$$\int_{\delta K_i} \frac{ds}{(\sigma_i(x))^{p-1}} = \int_0^{2\pi} \frac{h_i d\theta + dh'_i}{|h_i - h_{i+1}|^{p-1}}.$$

Si ha inoltre da (0.17):

$$mis K_i = \int_0^{2\pi} h_i (h_i d\theta + dh'_i).$$

Si ha quindi per la (0.7) e la (0.8):

$$A_r(K, U) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{r-1} (u_{i+1} - u_i)^p \int_0^{2\pi} \frac{h_i d\theta + dh'_i + h_{i+1} d\theta + dh'_{i+1}}{|h_i - h_{i+1}|^{p-1}} \quad (0.21)$$

e :

$$B_r(K, U) = \sum_{i=1}^r \frac{(u_i^p - u_{i-1}^p)}{2} \int_0^{2\pi} h_i (h_i d\theta + dh'_i). \quad (0.22)$$

L'espressione precedente può essere anche vista come norma in  $L_p$  di una ben precisa funzione associata alla stratificazione  $(K, U)$ . Precisamente sia  $\check{u}$  la funzione definita da:

$$\check{u}(x) = u_i, \quad \text{se } x \in K_i - K_{i+1} \quad \text{per } i = 0, \dots, r-1$$

$$\check{u}(x) = u_r = 1, \quad \text{se } x \in K_r,$$

risulta allora:

$$B_r(K, U) = \int_{\Omega} \check{u}^p dx. \quad (0.23)$$

Nel seguito diremo che  $\tilde{u}$  è la funzione "a strati" associata a  $(K, U)$ .

Per dare un significato analogo alla (0.21) si considera un'altra funzione  $\hat{u}$  associata alla stratificazione  $(K, U)$ , che diremo funzione quasi convessa a "tendone" definita col seguente procedimento:

Sia  $t$  un livello compreso fra  $u_{i-1}$  ed  $u_i$ , cioè  $t = (1 - \nu)u_{i-1} + \nu u_i$  con  $0 \leq \nu \leq 1$ , si considera un'interpolazione lineare degli insiemi convessi  $K_{i-1}$  e  $K_i$ :

$$K^t = (1 - \nu)K_{i-1} + \nu K_i.$$

Si può facilmente verificare che la funzione supporto  $h(\cdot, t)$  dell'insieme  $K^t$  risulta data da:

$$h(\theta, t) = (1 - \nu)h_{i-1}(\theta) + \nu h_i(\theta).$$

Allora  $\hat{u}$  è la funzione quasiconvessa avente per insiemi di livello  $t$  gli insiemi  $K^t$ . Essa risulta verificare la seguente formula:

$$A_r(K, U) = \int_{\Omega} |\nabla \hat{u}|^p dx \quad (0.24)$$

### 0.3 Prime proprietà dei minimi dei funzionali approssimanti

Il presente paragrafo è dedicato alla dimostrazione delle seguenti proprietà dei minimi di  $F_r$  e delle corrispondenti  $r$ -stratificazioni convesse minimanti:

**Teorema 2** Nella classe delle  $r$ -stratificazioni convesse  $(C_r, U_r)$  Il funzionale  $F_r$  ha minimo  $\lambda_r$  e:

$$\lambda_{r+1} < \lambda_r \text{ per } r = 1, 2, \dots \quad (0.25)$$

Se inoltre  $(K, U)$  è minimante  $F_r$  allora i livelli  $u_i$  sono distinti, le linee  $\delta K_i$  sono disgiunte e  $\text{mis}(K_i) > 0$  per  $i = 0, \dots, r$ .

Sia infatti  $\{(K^{(n)}, U^{(n)})\}$  una successione minimante del funzionale  $F_r = A_r/B_r$ , dove  $K^{(n)} = (K_0^{(n)}, K_1^{(n)}, \dots, K_r^{(n)})$  e  $U^{(n)} = (u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \dots, u_r^{(n)})$ ; è possibile estrarre una sottosuccessione che per semplicità si indica sempre con  $\{(K^{(n)}, U^{(n)})\}$  tale che:

- a)  $K_i^{(n)} \rightarrow K_i$ ;
- b)  $\text{mis}K_i^{(n)} \rightarrow \text{mis}K_i$ ;

- c) lunghezza di  $\delta K_i^{(n)} \rightarrow$  lunghezza di  $\delta K_i$  ;  
 d) I livelli  $u_i^{(n)}$  convergono ai livelli  $u_i$  per  $i = 0, 1, \dots, r$ ;  
 Inoltre per la proposizione 1 si ha anche:  
 e) le funzioni supporto relative convergono alle funzioni supporto degli insiemi  $K_i$  ;  
 f) Per  $i = 0, \dots, r$  le misure  $ds_i^{(n)}$  sulle linee  $\delta K_i^{(n)}$  convergono alla misura  $ds_i$  su  $\delta K_i$ .

Si osservi anche che dalla convergenza delle stratificazioni seguono le convergenze uniformi delle corrispondenti funzioni quasi convesse a tendone e a strati :

$$\tilde{u}^{(r)} \rightarrow \tilde{u}^r, \quad \hat{u}^{(r)} \rightarrow \hat{u}.$$

Da a), ..., f) e da (0.10) e (0.11) segue che il funzionale  $F_r$  è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza delle  $r$ -stratificazioni convesse. Allo stesso risultato si perviene usando la rappresentazione di  $F_r$  mediante le (0.23) e (0.24) la convergenza uniforme sopra evidenziata.

Esiste quindi un elemento  $(K, U) \in (C_r, U_r)$  tale che :

$$\lambda_r = F_r(K, U) = \inf \{F_r(C, v); (C, v) \in (C_r, U_r)\} \quad (0.26)$$

Per provare la (0.25) si costruisce in dipendenza di  $(K, U)$  una  $(r+1)$ -stratificazione convessa  $(K^*, U^*)$  di  $(C_{r+1}, U_{r+1})$  tale che:

$$F_{r+1}(k^*, U^*) < F_r(K, U). \quad (0.27)$$

Poiché  $F(K, U) < +\infty$  esiste un indice  $i$  tale che:

$$u_i < u_{i+1}, \quad \text{mis} K_{i+1} > 0, \quad K_{i+1} \neq K_i.$$

Si pone :

$$K^* = (K_1, \dots, K_i, \frac{K_i + K_{i+1}}{2}, K_{i+1}, \dots, K_r),$$

e

$$U^* = (u_1, \dots, u_i, \frac{u_i + u_{i+1}}{2}, \dots, u_r).$$

Risulta ovviamente  $(K^*, U^*) \in (C_{r+1}, U_{r+1})$ . Poiché la funzione a tendone associata a  $(K, U)$  coincide con quella associata a  $(K^*, U^*)$ , da (0.24) segue:

$$A_{r+1}(K^*, U^*) = A_r(K, U).$$

Mentre dal fatto che la funzione a strati associata ad  $(K^*, U^*)$  risulta maggiore della funzione a strati associata a  $(K, U)$  si ha da (0.23):

$$B_{r+1}(K^*, U^*) > B_r(K, U).$$

Dalle due relazioni precedenti segue la (0.27) e quindi la (0.25).

Proviamo ora che tutti i livelli  $u_i$  sono distinti. Se per assurdo  $u_j = u_{j+1}$  per un qualche  $j$  allora si pone :

$$K^o = (K_0, \dots, K_j, K_{j+2}, \dots, K_r), \quad U^o = (u_0, \dots, u_j, u_j + 2, \dots, u_r).$$

Risulta  $(K^o, U^o) \in (C_{r-1}, U_{r-1})$  e per la (0.11) si ha

$$F_{r-1}(K^o, U^o) \leq F_r(K, U),$$

in contrasto con (0.25).

Proviamo infine che  $K_r$  ha misura positiva, se per assurdo  $\text{mis}K_r = 0$  allora  $1 > u_{r-1} \neq 0$  essendo  $B_r(K, U) \neq 0$ . Si ponga:

$$K' = (K_0, K_1, \dots, K_{r-1}), \quad U' = \left( \frac{u_0}{u_{r-1}}, \frac{u_1}{u_{r-1}}, \dots, \frac{u_{r-2}}{u_{r-1}}, 1 \right).$$

Risulta  $(K', U') \in (C_{r-1}, U_{r-1})$  e :

$$B_r(K, U) = (u_{r-1})^p B_{r-1}(K', U'), \quad A_r(K, U) > (u_{r-1})^p A_{r-1}(K', U').$$

Quindi

$$\lambda_r = F_r(K, U) > F_{r-1}(K', U') \geq \lambda_{r-1},$$

in contrasto con (0.25).

Si è quindi provato che  $\text{mis}K_r > 0$  e quindi  $\text{mis}K_i > 0$  per ogni  $i$ .

Per concludere la dimostrazione del teoema 2 resta da dimostrare che le frontiere  $\delta K_i$  sono disgiunte. abbiamo già dimostrato che  $K_r$  è dotato di punti interni, si a  $O$  uno di essi scelto come origine del sistema di riferimento. Allora risulta per  $x \in \delta K_i$ :

$$\eta_i(x) = h_{i-1}(\theta) - h_i(\theta), \quad \sigma_i(x) = h_i(\theta) - h_{i+1}(\theta)$$

dove  $\theta$  è la direzione normale a  $\delta K_i$  in  $x$ . Supponiamo per assurdo che esiste almeno un punto  $y \in \delta K_i \cap \delta K_{i-1} \neq \emptyset$ .

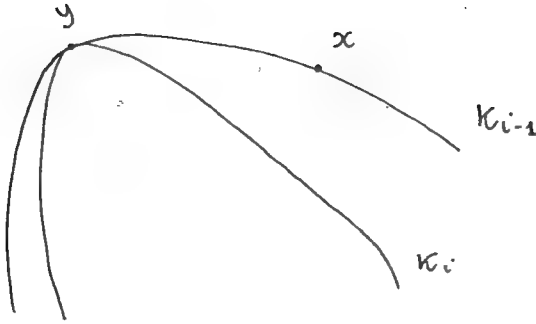


Figure 3: Linee con punti a comune.

Per  $x \in \delta K_{i-1}$  risulta

$$\sigma_{i-1}(x) \leq d(x, \delta K_i) \leq d(x, y) \leq \int_{\widehat{xy}} ds_{i-1}.$$

Dove  $\widehat{xy}$  indica l'arco di linea convessa su  $\delta K_{i-1}$  che congiunge  $x$  con  $y$ . Da questo segue che:

$$\int_{\delta K_{i-1}} (\sigma_{i-1}(x))^{-p} ds_{i-1} = +\infty$$

Questo è assurdo e conclude la dimostrazione del teorema.

## 1 Equazione di Eulero in forma debole

Per determinare una prima forma debole dell'equazione di Eulero per i funzionali approssimanti  $F_r$ , occorre fare delle variazioni ammissibili sulle linee di livello  $\delta K_i$ , e quindi sulle funzioni supporto  $h_i$  associate. Supponiamo per il momento, anche per capire con quali espressioni dovremo trattare, che le linee di livello siano già regolari di classe  $C^{(2)}$ , disgiunte, e che

$$R_i = h_i + h_i'' > 0, \quad (1.1)$$

cioè con raggi di curvatura strettamente positivi. Allora per ogni funzione  $\phi \in C_0^\infty$  e per  $\epsilon$  sufficientemente piccolo  $h_i + \epsilon\phi$  è funzione supporto di un insieme convesso  $K_i^\epsilon$ . Per semplicità fissiamo quindi un indice  $i$  e consideriamo la variazione di  $F_r$  in corrispondenza della variazione di  $h_i$  sopra considerata. Indichiamo anche con  $K^\epsilon = (K_0, \dots, K_{i-1}, K_i^\epsilon, K_{i+1}, \dots, K_r)$ . Risulta:

$$B_r(K^\epsilon, U) = \frac{u_i^p - u_{i-1}^p}{2} \int_0^{2\pi} (h_i + \epsilon\phi)[ds_i + \epsilon(\phi d\theta + d\phi')] + L,$$

con  $L$  indipendente da  $\epsilon$ , quindi:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} B_r \right|_{\epsilon=0} = \frac{u_i^p - u_{i-1}^p}{2} \int_0^{2\pi} \phi(h_i d\theta + dh_i') + h_i(\phi d\theta + d\phi')$$

che, integrando per parti, diventa

$$= (u_i^p - u_{i-1}^p) \int_0^{2\pi} \phi(h_i d\theta + dh_i') = (u_i^p - u_{i-1}^p) \int_0^{2\pi} \phi ds_i.$$

Pertanto

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} B_r \right|_{\epsilon=0} = (u_i^p - u_{i-1}^p) \int_0^{2\pi} \phi ds_i. \quad (1.2)$$

Analogamente posto per brevità:

$$f_i(\theta) = h_{i-1}(\theta) - h_i(\theta), \quad \Delta_i = u_i - u_{i-1}$$

si ha

$$\begin{aligned} A_r(K^\epsilon, U) &= \frac{(\Delta_i)^p}{2} \int_0^{2\pi} (f_i - \epsilon\phi)^{-p+1} [ds_{i-1} + ds_i + \epsilon(\phi d\theta + d\phi')] + \\ &+ \frac{(\Delta_{i+1})^p}{2} \int_0^{2\pi} (f_{i+1} + \epsilon\phi)^{-p+1} [ds_i + ds_{i+1} + \epsilon(\phi d\theta + d\phi')] + H, \end{aligned}$$

dove  $H$  non dipende da  $\epsilon$ . Quindi

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} A_r \right|_{\epsilon=0} &= \frac{(\Delta_i)^p}{2} \int_0^{2\pi} (p-1) f_i^{-p} \phi [ds_{i-1} + ds_i] + f_i^{-p+1} (\phi d\theta + d\phi') + \\ &+ \frac{(\Delta_{i+1})^p}{2} \int_0^{2\pi} (-p+1) f_{i+1}^{-p} (ds_i + ds_{i+1}) + f_{i+1}^{-p+1} (\phi d\theta + d\phi'). \quad (1.3) \end{aligned}$$

È chiaro che se  $(K, U)$  è una stratificazione convessa minimante  $F_r$  con linee di livello di classe  $C^2$ , disgiunte allora per ogni linea di livello  $\delta K_i$  si può operare la variazione precedente e quindi per la definizione di  $F_r$  data in (0.9) si ha  $\forall \phi \in C_0^\infty$ :

$$\frac{d}{d\epsilon} F_r \Big|_0 = \frac{1}{B_r} \frac{d}{d\epsilon} A_r \Big|_0 - \frac{A_r}{B_r^2} \frac{d}{d\epsilon} B_r \Big|_0 = 0. \quad (1.4)$$

Dove  $\frac{d}{d\epsilon} A_r \Big|_0$  e  $\frac{d}{d\epsilon} B_r \Big|_0$  sono date da (1.3) e (1.2). La (1.4) è l'equazione di Eulero in forma debole verificata da ogni linea di livello  $\delta K_i$  della minimante  $(K, U)$ . Se la condizione (1.1) viene a mancare allora non si può subito pervenire alla (1.4). La si otterrà infatti per passi successivi. Infatti in tale situazione si considerano variazioni del tipo

$$h_i + \epsilon(q - h_i)$$

dove  $q$  è la funzione supporto di un insieme convesso limitato  $Q$ . Per valori di  $\epsilon$  compresi tra 0 e 1 tale funzione è la funzione supporto di un insieme convesso  $K_i^\epsilon$ , inoltre poichè le linee  $\delta K_i$  sono disgiunte per  $\epsilon$  sufficientemente piccolo risulta

$$K_{i+1} \subset K_i^\epsilon \subset K_i.$$

Quindi se scegliamo  $\phi(\theta) = q(\theta) - h_i(\theta)$  e facciamo la derivata destra rispetto ad  $\epsilon$  in 0 di  $F_r$ , invece di (1.4) si ottiene

$$\frac{d}{d\epsilon} F_r \Big|_{0+} = \frac{1}{B_r} \frac{d}{d\epsilon} A_r \Big|_{0+} - \frac{A_r}{B_r^2} \frac{d}{d\epsilon} B_r \Big|_{0+} \geq 0. \quad (1.5)$$

Si ha quindi il seguente:

**Lemma 1** Sia  $(K, U)$  minimante  $F_r$  nella classe delle  $r$ -stratificazioni convesse  $(C_r, U_r)$ ; sia  $\lambda_r$  il valore del minimo,  $q$  la funzione supporto di un convesso limitato  $Q$ ;  $h_i$  le funzioni supporto di  $K_i$ ,  $f_i$ ,  $\phi$  e  $ds_i$  definite in  $[0, 2\pi]$  da:

$$f_i = h_{i-1} - h_i, \quad \phi = q - h_i, \quad ds_i = h_i d\theta + dh_i'. \quad (1.6)$$

Allora per  $i = 1, 2, \dots, r-1$ :

$$E_i = \int_0^{2\pi} \phi \{ [(p-1)(\Delta_i^p f_i^{-p} - \Delta_{i+1}^p f_{i+1}^{-p}) - \lambda_r(u_i^p - u_{i-1}^p)] ds_i +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{p}{2} \Delta_i^p [f_i^{-p+1} + (p-1)f_i'^2 f_i^{-p-1}] + \\
& + \Delta_{i+1}^p [f_{i+1}^{-p+1} + (p-1)f_{i+1}'^2 f_{i+1}^{-p-1}] \} d\theta \geq 0; \quad (1.7)
\end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
E_r = \int_0^{2\pi} \phi \{ & [(p-1)(\Delta_r^p f_r^{-p} - \lambda_r(u_r^p - u_{r-1}^p))] ds_r + \\
& + \frac{p}{2} \Delta_r^p [f_r^{-p+1} + (p-1)f_r'^2 f_r^{-p-1}] \} d\theta \geq 0. \quad (1.8)
\end{aligned}$$

Se infine  $h_i \in C^{(2)}[0, 2\pi]$ ,  $h_i + h_i' > 0$  allora per ogni  $q \in C^2[0, 2\pi]$  non necessariamente funzione supporto di un insieme convesso, si ha:

$$E_i = 0 \quad (i = 1, \dots, r). \quad (1.9)$$

*Dimostrazione.* Si considerino l'espressioni (1.3) e (1.2). In queste espressioni si operano delle trasformazioni mediante la seguente integrazione per parti:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f_i^{-p+1} d\phi' &= \int_0^{2\pi} \phi \left[ (-p+1)f_i^{-p} df_i' + p(p-1)f_i^{-p-1} f_i'^2 d\theta \right], \\
\int_0^{2\pi} f_{i+1}^{-p+1} d\phi' &= \int_0^{2\pi} \phi \left[ (-p+1)f_{i+1}^{-p} df_{i+1}' + p(p-1)f_{i+1}^{-p-1} f_{i+1}'^2 d\theta \right], \\
\int_0^{2\pi} h_i d\phi' &= \int_0^{2\pi} \phi_i dh_i'.
\end{aligned}$$

Tenendo conto della (1.5) si perviene quindi a:

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta_i^p}{2} \int_0^{2\pi} \phi \left\{ (p-1)f_i^{-p} (ds_{i-1} + ds_i) + \right. \\
& + f_i^{-p+1} d\theta + (-p+1)f_i^{-p} df_i' + p(p-1)f_i^{-p-1} f_i'^2 d\theta \} + \\
& + \frac{\Delta_{i+1}^p}{2} \int_0^{2\pi} \phi \left\{ (1-p)f_{i+1}^{-p} (ds_i + ds_{i+1}) + f_{i+1}^{-p+1} d\theta + \right. \\
& + (-p+1)f_{i+1}^{-p} df_{i+1}' + p(p-1)f_{i+1}^{-p-1} f_{i+1}'^2 d\theta \} - \\
& - \lambda_r (u_i^p - u_{i-1}^p) \int_0^{2\pi} \phi ds_i \geq 0.
\end{aligned}$$

dove  $\lambda_r$  è definito dalla (0.26). Da cui raccogliendo il segno di integrale e osservando che  $ds_{i-1} - ds_i = f_i d\theta + df_i'$  si ha la (1.7).

Per quanto riguarda l'ultimo insieme di livello  $K_r$  si ha una situazione analoga ma più semplice. Infatti si ha

$$A_r(K^c, U) = \frac{\Delta_r^p}{2} \int_0^{2\pi} f_r^{-p+1} (ds_{r-1} + ds_r)$$

e alagomante il termine  $B_r(K^c, U)$  si ottiene dal termine  $B_i(K^c, U)$  con  $i = r$ . Si perviene così a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} F_r \Big|_{0+} &= \frac{\Delta^p}{2} \int_0^{2\pi} \phi \{ (p-1) f_r^{-p} (ds_{r-1} + ds_r) + f_r^{-p+1} d\theta + \\ &+ (-p+1) f_r^{-p} df_r' + \frac{p(p-1)}{2} f_r^{-p-1} f_r'^2 d\theta \} \\ &- \lambda_r (u_r^p - u_{r-1}^p) \int_0^{2\pi} \phi ds_r \geq 0. \end{aligned}$$

Da cui con integrazioni per parti simili a quelle precedentemente elencate si perviene a (1.8). Infine nell'ipotesi di regolarità  $C^{(2)}$  si ha che le variazioni precedentemente considerate sono variazioni ammissibili anche per  $\epsilon$  negativo purché sufficientemente piccolo. In tal caso si può calcolare anche la derivata sinistra rispetto ad  $\epsilon$  di  $F_r$  e coincide con la derivata destra e si ha la (1.9).

Nel seguito di questo paragrafo si specifica  $\phi$ , cioè  $Q$ , in modo da provare la regolarità  $C^{(2)}$  delle linee di livello  $\delta K_i$ . Si comincia col provare che le linee di livello  $\delta K_i$  non hanno punti spigolosi.

**Proposizione 5** *Se  $(K, U)$  è un minimo per  $F_r$  in  $(F_r, U_r)$  si ha che le frontiere  $\delta K_i$  con  $i = 1, 2, \dots, r$  sono dotate in ogni punto di retta tangente.*

Poiché le linee  $\delta K_i$  sono convesse basta provare che non vi sono punti spigolosi. Si supponga per assurdo che esista un punto  $x \in \delta K_i$  dotato di due rette di supporto distinte. Allora esiste un massimo intervallo  $[\theta_1, \theta_2]$  tale che per ogni  $\theta$  in tale intervallo corrisponde un vettore  $(\cos \theta, \sin \theta)$  normale ad una retta di supporto a  $K_i$  passante per il punto  $x$ . Si considera come variazione di  $\delta K_i$  quella che si ottiene sostituendo ad un intorno di un suo punto  $x$ , supposto spigoloso, un segmento rettilineo (vedi fig 4). L'insieme  $Q$  convesso che si utilizza per definire la variazione  $\phi$  nel lemma precedente è l'insieme convesso che si ottiene "tagliando" da  $K_i$  lo spigolo o meglio un intorno dello spigolo in  $x$ . Siano  $x_1, x_2$  due punti, rispettivamente, a sinistra e a destra di  $x$  su  $\delta K_r$  cui corrispondono due normali esterne a  $\delta K_i$  di direzione rispettivamente  $\theta_1 - \tau_1$  e  $\theta_2 + \tau_2$ . Sia  $S$  il segmento che congiunge  $x_1$  e  $x_2$  ortogonale ad una direzione  $\tau \in (\theta_1, \theta_2)$ , vedi fig. 4. Sia  $Q$  l'insieme convesso delimitato da  $S$  e dalla parte di  $\delta K_r$  che non contiene  $x$ ,  $q$  la sua funzione supporto. Sia  $\epsilon$  la distanza di  $x$  da  $S$  ed  $y$  la proiezione di  $x$  su  $S$ , si ha per la (1.6):

$$\phi(\theta) = 0 \quad \text{per } \theta \notin (\theta_1 - \tau_1, \theta_2 + \tau_2) \quad (1.10)$$

perché  $\delta Q$  e  $\delta K_i$  coincidono in corrispondenza di tali valori di  $\theta$ . Inoltre osservando che se  $\theta \in [\theta_1, \tau]$  allora  $\phi(\theta) = q(\theta) - h_i(\theta)$  è la distanza fra due

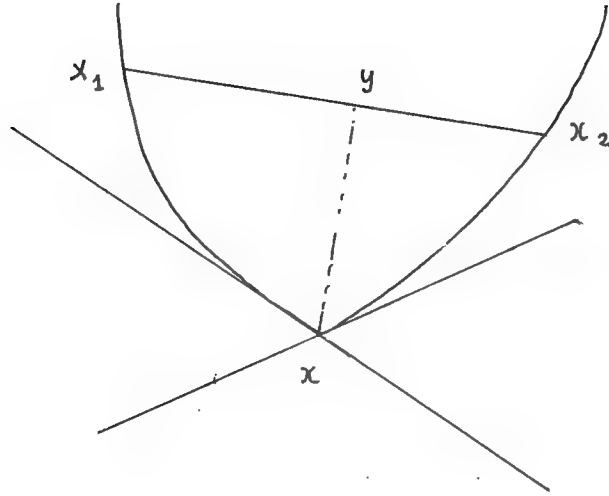


Figure 4: Punto spigoloso.

rette parallele passanti una per  $x$  e l'altra per  $x_1$  segue:

$$\phi(\theta) = -\epsilon \cos(\tau - \theta) + \overline{x_1 y} \sin(\tau - \theta), \quad \theta \in [\theta_1, \tau]; \quad (1.11)$$

analogamente

$$\phi(\theta) = -\epsilon \cos(\theta - \tau) + \overline{x_2 y} \sin(\theta - \tau), \quad \theta \in [\tau, \theta_2]. \quad (1.12)$$

Si osservi anche che essendo  $Q \subset K_i$  si ha  $\phi \leq 0$  e

$$|\phi(\theta)| \leq d(x, Q) = \epsilon \quad \text{per } \theta \in [\theta_1 - \tau_1, \theta_1] \cup [\theta_2, \theta_2 + \tau_2] \quad (1.13)$$

Per la proposizione 4 si ha inoltre:

$$h_i(\theta) + h''(\theta) = 0 \quad \text{per } \theta \in (\theta_1, \theta_2).$$

Si pone ora e nel seguito ( $1 \leq i \leq r$ ):

$$C_i = (p-1)[\Delta_i^p f_i^{-p} - \Delta_{i+1}^p f_{i+1}^{-p}] - \lambda_i(u_i^p - u_{i-1}^p) \quad (1.14)$$

$$C_r = (p-1)\Delta_r^p f_r^{-p} - \lambda_r(u_r^p - u_{r-1}^p), \quad (1.15)$$

$$D_i = \frac{p}{2}(\Delta_i^p [f_i^{-p} + (p-1)f_i^{-p-1} f_i'^2] + \Delta_{i+1}^p [f_{i+1}^{-p} + (p-1)f_{i+1}^{-p-1} f_{i+1}'^2]), \quad (1.16)$$

$$D_r = \frac{p\Delta_r^p}{2}[f_r^{-p} + (p-1)f_r^{-p-1} f_r'^2]. \quad (1.17)$$

Per la limitatezza e la positività delle  $f_i$  esiste una costante  $W$  tale che  $D_i \leq W$ . Dalla condizione (1.7) del lemma 1 segue allora:

$$\int_{\theta_1 - \tau_1}^{\theta_1} C_i \phi ds_i + \int_{\theta_2}^{\theta_2 + \tau_2} C_i \phi ds_i \geq -W \int_{\theta_1}^{\theta_2} \phi d\theta.$$

Questo è assurdo perché il secondo termine è infinitesimo dello stesso ordine di  $\epsilon$ , mentre ciascuno dei due integrali al primo membro è un infinitesimo di ordine superiore ad  $\epsilon$  essendo:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1 - \tau_1}^{\theta_1} ds_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_2}^{\theta_2 + \tau} ds_i = 0.$$

Questo conclude la dimostrazione.

La seguente proposizione è un primo passo verso un'equazione di Eulero di tipo classico delle linee di livello.

**Proposizione 6** *Siano  $C_i$  e  $D_i$  definiti da (1.14) - (1.16). Allora, fissato  $\tau \in [0, 2\pi]$  risulta ( $i = 1, \dots, r$ ):*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma} \int_{\tau - \sigma}^{\tau + \sigma} C_i ds_i = -\frac{1}{2} [D_i(\tau^+) + D_i(\tau^-)] < 0. \quad (1.18)$$

$D_i(\tau^+)$  e  $D_i(\tau^-)$  indicano rispettivamente il limite destro e sinistro della funzione  $D_i$  nel punto  $\tau$ . Infatti le funzioni supporto  $h_i$  che intervengono nella definizione di  $D_i$  hanno comunque sempre la derivata dotata di limite destro e sinistro per la proposizione 3.

*Dimostrazione.* Sia  $x$  un punto su  $\delta K$ ; con normale esterna di direzione  $\tau$ . Siano  $x_1$  e  $x_2$  su  $\delta K$ ; con normale esterna di direzione, rispettivamente,  $\tau - \sigma, \tau + \sigma$ . Sia  $S$  il segmento che congiunge  $x_1$  con  $x_2$ ; con un procedimento identico alla dimostrazione della proposizione precedente (l'unica vera differenza qui è che  $\tau = \theta_1 = \theta_2$ ) si perviene a:

$$\int_{\tau - \sigma}^{\tau + \sigma} \phi(\theta) [C_i(\theta) ds_i + D_i(\theta) d\theta] \geq 0, \quad (1.19)$$

e quindi

$$\phi(\tau) \int_{\tau - \sigma}^{\tau + \sigma} [C_i(\theta) ds_i + D_i(\theta) d\theta] + \int_{\tau - \sigma}^{\tau + \sigma} [\phi(\theta) - \phi(\tau)] [C_i(\theta) ds_i + D_i(\theta) d\theta] \geq 0. \quad (1.20)$$

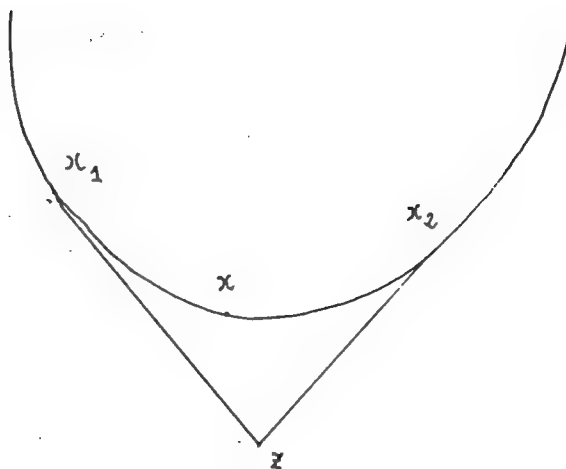


Figure 5: Inviluppo convesso

Per  $\sigma \rightarrow 0$  nella precedente disuguaglianza il secondo integrale è un infinitesimo di ordine superiore rispetto al primo; pertanto essendo  $\phi(\tau) < 0$  si ottiene:

$$\max \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma} \int_{\tau-\sigma}^{\tau+\sigma} C_i ds_i + D_i d\theta \leq 0.$$

Poichè  $D_i$  ha in  $\tau$  un limite destro e un limite sinistro che per (1.16) sono strettamente positivi ne segue:

$$\max \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma} \int_{\tau-\sigma}^{\tau+\sigma} C_i ds_i \leq -\frac{1}{2}[D_i(\tau^+) + D_i(\tau^-)] < 0. \quad (1.21)$$

Per ottenere una disuguaglianza nell'altro senso si procede nel modo seguente. Dai punti  $x_1$  e  $x_2$  precedentemente definiti si tracciano le rette tangenti  $t_1$  e  $t_2$  che si incontrano in un punto  $z$ . Sia ora  $Q$  l'insieme convesso delimitato da  $t_1$ ,  $t_2$  e dalla parte di  $\delta K_i$  che non contiene  $x$ , in altre parole  $Q$  è l'inviluppo convesso di  $z$  e  $K_i$ , vedi fig. 5. Sia  $q$  la funzione supporto di  $Q$  e  $\phi = q - h_i$ , risulta:

$$\begin{cases} \phi = 0 & \text{per } \theta \notin (\tau - \sigma, \tau + \sigma), \\ 0 \leq \phi \leq d(z, \delta K_i) & \text{per } \theta \in [\tau - \sigma, \tau + \sigma] \end{cases}$$

Si osservi che non è escluso che l'arco  $\widehat{x_1 x_2}$  contenga tratti rettilinei. Dato che vale la (1.7) si ha per tale variazione  $\phi$  la (1.20) e quindi la (1.21). Ma in questo caso  $\phi(\tau) > 0$  e quindi si ha:

$$\min \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\sigma} \int_{\tau-\sigma}^{\tau+\sigma} C_i ds_i \geq -\frac{1}{2}[D_i(\tau^+) + D_i(\tau^-)]. \quad (1.22)$$

Dalla (1.22) e dalla (1.23) si prova la (1.19). Come conseguenza immediata della proposizione precedente per la continuità delle funzioni  $C_i$  si perviene a:

**Proposizione 7** *Siano  $C_i$  e  $D_i$  definite da (1.14) e (1.16) allora:*

$$C_i \leq 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, r. \quad (1.23)$$

*Inoltre il parametro d'arco  $s_i$  è dotato in ogni punto di derivata finita o infinita e, fissato  $\tau \in [0, 2\pi]$  e  $m \in \{1, 2, \dots, r\}$  si verifica uno o l'altro dei seguenti casi:*

$$a) C_i = 0 \quad e \quad \left. \frac{ds_m}{d\theta} \right|_{\tau} = +\infty \quad (1.24)$$

$$b) C_i \neq 0 \quad e \quad \left. \frac{ds_m}{d\theta} \right|_{\tau} = \frac{-D_m(\tau^+) + D_m(\tau^-)}{2C_m(\tau)}. \quad (1.25)$$

## 2 Propria convessità

Questo paragrafo è la parte centrale e più importante. Mentre per provare che le linee  $\delta K_i$  sono disgiunte e di classe  $C^{(1)}$  si utilizzano variazioni locali, per provare che una linea di livello è propriamente convessa analoghe argomentazioni non sono sufficienti ed occorre utilizzare la proprietà di propria convessità della linea di livello più esterna cioè  $\delta\Omega$ .

Questo fatto è controllato mediante un principio di massimo forte del seguente tipo:

*se su una linea di livello interna vi è un tratto rettilineo, allora esso deve esserci un tratto rettilineo nella stessa direzione anche sulla linea immediatamente precedente e successiva, inoltre la lunghezza dei tratti rettilinei non può avere un massimo positivo su una linea di livello interna.*

Analogamente si prova in questo paragrafo che se la curvatura in un punto di una linea di livello interna fosse nulla analoga situazione si avrebbe per le linee di livello contigue ed in tal modo si riesce a concludere che le linee di livello  $\delta K_i$  della  $r$ -stratificazione convessa minimante  $F_r$  hanno raggio di curvatura limitato. Ciò consente di affermare che il minimo trovato è interno alla classe ed è quindi un minimo in senso classico. Purtroppo non si è riusciti a trovare una limitazione uniforme superiore per tale raggio di curvatura e ciò rende più complicato il passaggio al limite per  $r \rightarrow +\infty$ .

**Teorema 3** *Se  $\delta\Omega$  è propriamente convesso ogni linea  $\delta K_i$  di ogni  $r$ -stratificazione convessa  $(K, U)$  minimante  $F_r$  è propriamente convessa.*

Si ricordi che per la proposizione 3 la propria convessità di  $\delta K_i$  è equivalente alla continuità delle derivate delle funzioni supporto  $h_i$ .

Si fissi un indice  $m \in \{1, 2, \dots, r\}$ . se per assurdo  $h'_m$  è discontinua nel valore  $\tau$  allora esiste su  $\delta K_m$  un segmento  $S$  ortogonale alla direzione  $\tau$  e di lunghezza

$$l_m(\tau) = h'_m(\tau^+) - h'_m(\tau^-) > 0. \quad (2.1)$$

Da questa relazione e dalla (0.18) segue:

$$\left. \frac{ds_m}{d\theta} \right|_{\tau} = +\infty.$$

Ne segue che siamo nel caso a) della proposizione precedente, ne segue  $C_m(\tau) = 0$  e quindi per la (1.24) la funzione  $C_m$  ha un massimo nel punto  $\tau$ .  $C_m$  ha derivata destra e sinistra e quindi

$$C'_m(\tau^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{C_m(\tau + h) - C_m(\tau)}{h} \leq 0$$

$$C'_m(\tau^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{C_m(\tau + h) - C_m(\tau)}{h} \geq 0.$$

Dunque segue per la (1.14):

$$-p(p-1)\Delta_m^p f_m^{-p-1}(\tau) f'_m(\tau^+) + p(p-1)\Delta_{m+1}^p f_{m+1}^{-p-1} f'_{m+1}(\tau^+) \leq 0 \quad (2.2)$$

$$-p(p-1)\Delta_m^p f_m^{-p-1}(\tau) f'_m(\tau^-) + p(p-1)\Delta_{m+1}^p f_{m+1}^{-p-1} f'_{m+1}(\tau^-) \leq 0. \quad (2.3)$$

Sottraendo la prima dalla seconda si ottiene:

$$p(p-1)[\Delta_m^p f_m^{-p-1}(\tau)(f'_m(\tau^+) - f'_m(\tau^-)) - \Delta_{m+1}^p f_{m+1}^{-p-1}(f'_{m+1}(\tau^+) - f'_{m+1}(\tau^-))] \geq 0.$$

cioè ricordando che  $f_i = h_{i-1} - h_i$ :

$$\begin{aligned} & \Delta_m^p f_m^{-p-1}(\tau)[(h'_m(\tau^+) - h'_m(\tau^-)) - (h'_m(\tau^+) - h'_m(\tau^-))] + \\ & - \Delta_{m+1}^p f_{m+1}^{-p-1}[(h'_{m+1}(\tau^+) - h'_{m+1}(\tau^-)) - (h'_m(\tau^+) - h'_m(\tau^-))] \geq 0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Questa disuguaglianza ha un interessante significato geometrico. Infatti indicando

$$l_i = h'_i(\tau^+) - h'_i(\tau^-) \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

essa può essere trascritta più sinteticamente nella seguente:

$$\alpha(l_{m-1} - l_m) + \beta(l_{m+1} - l_m) \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.5)$$

Si ricava, essendo  $l_m(\tau) = l_m > 0$ , che almeno una delle due seguenti relazioni è vera:

$$\alpha) \ l_{m-1} \geq l_m, \quad \text{oppure} \quad \beta) \ l_{m+1} \geq l_m; \quad (2.6)$$

inoltre valgono le seguenti implicazioni

$$l_{m-1} \leq l_m \implies l_m \leq l_{m+1}; \quad (2.7)$$

$$l_{m+1} \leq l_m \implies l_m \leq l_{m-1}. \quad (2.8)$$

Geometricamente (2.6) significa che se su  $\delta K_m$  con  $m \in \{1, \dots, r-1\}$  esiste un segmento con normale esterna di direzione  $\tau$ , di misura  $l_m(\tau) > 0$ , allora esiste un segmento con la stessa normale esterna su  $\delta K_{m-1}$  oppure su  $\delta K_{m+1}$  e di lunghezza non minore. (2.7) e (2.8) significano che se vi sono due segmenti con la stessa direzione su due linee di livello consecutive "interne" allora esiste pure un segmento di lunghezza maggiore o uguale a entrambi su una linea di livello consecutiva a queste e dalla parte opposta rispetto a quella che contiene il segmento di misura minore o uguale.

In altre parole si ha il seguente "principio di massimo forte" per la funzione  $l_i(\theta)$ , vista come funzione di  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ :

*non esiste  $\tau$  ed  $i$  tale che:  $l_i(\tau) > l_{i-1}(\tau)$  e  $l_i(\tau) > l_{i+1}(\tau)$ , e inoltre se  $l_i(\tau)$  ha un massimo positivo "interno" cioè per  $i = m \in \{1, \dots, r-1\}$ , allora  $l_i(\tau)$  è costante al variare di  $i$ .*

Poiché  $\delta\Omega$  è propriamente convessa, cioè  $l_0 \equiv 0$ , allora la funzione  $l_i$  non può avere un massimo positivo sulla linea di livello esterna. Il teorema è provato se risulta provato se si prova che la funzione  $l_i$  non può avere neanche un massimo stretto in  $i = r$ , cioè sull'ultima linea di livello, cioè che non esiste  $\tau$  tale che:

$$l_{r-1}(\tau) < l_r(\tau). \quad (2.9)$$



Se per assurdo sussiste la (2.9) allora analogamente a prima si ha

$$\left. \frac{ds_\tau}{d\theta} \right|_\tau = +\infty.$$

e quindi per la proposizione precedente  $C_\tau(\tau) = 0$  e  $C_\tau(\theta)$  ha un massimo in  $\theta = \tau$ . Da ciò segue per la definizione di  $C_\tau$ :

$$-p(p-1)\Delta_\tau^p f_\tau^{-p-1}(\tau) f'_\tau(\tau^+) \leq 0, \quad (2.10)$$

$$-p(p-1)\Delta_\tau^p f_\tau^{-p-1}(\tau) f'_\tau(\tau^-) \leq 0. \quad (2.11)$$

Sottraendo la prima dalla seconda si ha:

$$p(p-1)\Delta_\tau^p f_\tau^{-p-1}(\tau) [f'_\tau(\tau^+) - f'_\tau(\tau^-)] \geq 0,$$

da cui per la definizione di  $f_\tau = h_{\tau-1} - h_\tau$  segue:

$$l_\tau(\tau) \leq l_{\tau-1}(\tau),$$

in contrasto con la (2.9).

Un'ulteriore regolarizzazione delle linee di livello della soluzione minimale consiste nella seguente proposizione:

**Proposizione 8** *Se  $\delta\Omega$  è di classe  $C^2$  e con curvatura strettamente positiva, ciascuna delle linee di livello della stratificazione  $(K, U)$  minimante  $F_\tau$  è di classe  $C^2$  e con curvatura strettamente positiva.*

Da quanto mostrato nel §2 la linea convessa  $\delta K_i$  è di classe  $C^2$  e a curvatura strettamente positiva se e solo se  $h_i$  è di classe  $C^2$ . Per provare ciò si ragiona per assurdo. Sia  $m \in \{1, \dots, r\}$  e sia  $h'_m$  non derivabile nel punto  $\tau$ . Allora anche il parametro d'arco  $s_m$  non ha derivata finita in  $\tau$  e quindi sussiste il caso (1.25) con  $i = m$ ; poichè  $ds_m = h d\theta + dh'_m$  allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{h'_m(\tau + \epsilon) - h'_m(\tau)}{\epsilon} = +\infty. \quad (2.12)$$

Inoltre  $\tau$  è un punto di massimo interno per  $C_m$ , quindi:

$$C_m(\tau + \epsilon) + C_m(\tau - \epsilon) - 2C_m(\tau) \leq 0 \quad \forall \epsilon.$$

Da cui segue per la (1.14):

$$\begin{aligned} & \Delta_m^p [f_m^{-p}(\tau + \epsilon) + f_m^{-p}(\tau - \epsilon) - 2f_m^{-p}(\tau)] - \\ & - \Delta_{m+1}^p [f_{m+1}^{-p}(\tau + \epsilon) + f_{m+1}^{-p}(\tau - \epsilon) - 2f_{m+1}^{-p}(\tau)] \leq 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Si osservi ora che se  $g$  è una funzione positiva di classe  $C^1$  e se  $p > 1$  allora:

$$\begin{aligned} & g^{-p}(\tau + \epsilon) + g^{-p}(\tau - \epsilon) - 2g^{-p}(\tau) = -p[g(\tau + \epsilon) + g(\tau - \epsilon) - 2g(\tau)] + \\ & + p(p+1)g^{-p-2}(g')^2\epsilon^2 + \epsilon^2 O(\epsilon), \end{aligned}$$

con  $O(\epsilon)$  infinitesimo con  $\epsilon$ . Dall'osservazione precedente e da (2.13) segue:

$$\begin{aligned} & \Delta_m^p \{p(p+1)f_m^{-p-2}(\tau)f_m'^2(\tau)\epsilon^2 - pf_m^{-p-1}(\tau)[f_m(\tau + \epsilon) + f_m(\tau - \epsilon) - 2f_m(\tau)] - \\ & - \Delta_{m+1}^p \{p(p+1)f_{m+1}^{-p-2}(\tau)f_{m+1}'^2(\tau)\epsilon^2 - \\ & - pf_{m+1}^{-p-1}(\tau)[f_{m+1}(\tau + \epsilon) + f_{m+1}(\tau - \epsilon) - 2f_{m+1}(\tau)]\} \leq \epsilon^2 O(\epsilon) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Posto

$$\Delta(n, i) = \frac{h(\tau + \epsilon_n)}{-2h_i(\tau) + h_i(\tau - \epsilon_n)} \epsilon_n^2,$$

dove  $\{\epsilon_n\}$  è una successione non nulla convergente a zero tale che esistono finiti o infiniti i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, i)}{\Delta(n, i+1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, i)}{\Delta(n, i)} = L_i. \quad \text{per } i = 0, \dots, r-1.$$

Ricordando che  $f_i = h_{i-1} - h_i$  da (2.14) segue:

$$a_m [\Delta(n, m) - \Delta(n, m-1)] + b_m [\Delta(n, m) - \Delta(n, m+1)] < c_m + O(\epsilon_n), \quad (2.15)$$

con  $a_m, b_m, c_m$  indipendenti da  $\epsilon_n$  e  $a_m, b_m$  positivi,  $c_m$  limitato.

Per la (2.12)  $\Delta(n, m) \rightarrow +\infty$ , dividendo la (2.15) per  $\Delta(n, m)$  e passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ :

$$a_m \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m-1)}{\Delta(n, m)}\right) + b_m \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m+1)}{\Delta(n, m)}\right) \leq 0. \quad (2.16)$$

Per la positività di  $a_m$  e  $b_m$  e tenuto conto che  $L_m = +\infty$  si ha che è verificato uno dei seguenti tre casi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m-1)}{\Delta(n, m)} > 1, \quad L_{m-1} = +\infty \quad (2.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m+1)}{\Delta(n, m)} > 1, \quad L_{m+1} = +\infty \quad (2.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m-1)}{\Delta(n, m)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m+1)}{\Delta(n, m)} = 1, \quad L_{m-1} = L_{m+1} = +\infty. \quad (2.19)$$

Si tratta ora di provare come nel teorema precedente una specie di principio di massimo forte per la funzione  $\Delta(n, i)$ , come funzione di  $i$ , del seguente tipo:

*se per un certo indice  $m$  e una certa direzione  $\tau$  si ha  $\Delta(n, m) \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow \infty$  allora questo accade pure per l'indice precedente o successivo. Inoltre "l'ordine" di  $\infty$  dell'espressione  $\Delta(n, m)$  non ha un massimo interno.*

Supponiamo ora che valga la (2.17), risulta allora per la proposizione 3 ;  $C_{m-1}(\tau) = 0$ , da cui  $C_{m-1}(\theta)$  ha un massimo in  $\theta = \tau$  e quindi sussiste la relazione analoga alla (2.16) sostituendo  $m-1$  al posto di  $m$ . Da quest'ultima e dalla (2.17) segue:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m-1)}{\Delta(n, m-2)} > 1 \quad e \quad L_{m-1} = +\infty.$$

Si ha così una relazione analoga alla (2.17) dove al posto di  $m$  si è sostituito  $m-1$ . Così procedendo si otterrebbe  $L_0 = +\infty$ , questo è assurdo perché  $\delta\Omega$  ha curvatura positiva e quindi raggio di curvatura  $\frac{d^2s}{d\theta^2}$  limitato.

Se vale invece la (2.18), ragionando analogamente, si ricava:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m+2)}{\Delta(n, m+1)} > 1, \quad e \quad L_{m+1} = +\infty.$$

Cioè la (2.18) con  $m+1$  al posto di  $m$ . Così procedendo si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, r)}{\Delta(n, r-1)} > 1, \quad e \quad L_r = +\infty. \quad (2.20)$$

Per la proposizione 3 si ha allora  $C_r(\tau) = 0$  e quindi  $C-r$  ha un massimo in  $\theta = \tau$ . Dalla (1.15) si ha:

$$\Delta_r^p[f_r^{-p}(\tau + \epsilon) + f_r^{-p}(\tau - \epsilon) - 2f_r^{-p}(\tau)] \leq 0. \quad (2.21)$$

Da cui segue analogamente a sopra :

$$a_r [\Delta(n, r) - \Delta(n, r - 1)] < c_r + O(\epsilon_n).$$

Dividendo per  $\Delta(n, r)$  e passando al limite si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, r)}{\Delta(n, r - 1)} \leq 1,$$

in contrasto con la (2.20).

Infine se è verificata la (2.19) si ha  $C_{m-1}(\tau = 0)$  e come sopra quindi:  $L_{m-2} = +\infty$ . Poiché, per quanto appena provato, non possono sussistere la (2.17) e la (2.18) con  $m - 1$  al posto di  $m$ , si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m - 1)}{\Delta(n, m - 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta(n, m)}{\Delta(n, m - 1)} = 1.$$

Così procedendo si ritroverebbe  $L_0 = +\infty$ , assurdo. Da ciò la tesi. Ciò conclude la dimostrazione.

Come conseguenza della regolarità delle  $h_i$  provata nelle due proposizioni precedenti e dalla (1.19) si può enunciare la seguente proposizione che fornisce l'equazione di Eulero di tipo classico delle linee di livello  $\delta K_i$  di una stratificazione minimante.

**Teorema 4** *Se  $(K, U)$  è una minimante  $F_r$  in  $(C_r, U_r)$ , indicato con  $R_i$  il raggio di curvatura di  $\delta K_i$ , si ha:*

$$C_i R_i + D_i = 0 \quad (i = 1, \dots, r). \quad (2.22)$$

Dove  $C_i, D_i$  sono definiti da (1.14), (1.16), (1.15), (1.18).

### 3 Problema continuo

Si considera, come già detto nell'introduzione, la funzione a tendone  $\hat{u}^{(r)}$  associata alla stratificazione  $(K_r, U_r)$  minimante  $F_r$ . Tale funzione è quasi convessa per costruzione e per la regolarità provata ha linee di livello di classe  $C^2$ . È facile vedere inoltre che per ogni punto  $x$  interno all'anello convesso  $K_{i-1} - K_i$  risulta:

$$|\nabla \hat{u}^{(r)}| = \frac{u_i^{(r)} - u_{i-1}^{(r)}}{h_{i-1}(\theta) - h_i(\theta)},$$

dove  $\theta$  è la direzione della normale esterna alla linea di livello di  $u^{(r)}$  passante per  $x$ . Al variare di  $r$  si ha quindi una successione  $\{\hat{u}^{(r)}\}$  di funzioni quasi convesse. La classe delle funzioni quasi convesse è compatta rispetto alla convergenza di Kuratowsky, vedi Longinetti [10]; pertanto esiste una successione estratta da convergente puntualmente in  $\Omega$  ad una funzione quasi convessa  $\bar{v}$ . Per concludere la dimostrazione del Teorema 1 basta dimostrare che  $v^* = \bar{v}$  dove  $v$  è la soluzione dell'equazione (0.2).  $\bar{v}$  è minimante il funzionale (0.1) nella classe delle funzioni quasi convesse positive nulle su  $\delta\Omega$ . Se si avesse a disposizione una limitazione uniforme per i raggi di curvatura delle linee di livello  $\delta K_i$  si ricaverebbe che  $\bar{v}$  è interna a tale classe e quindi verificherebbe immediatamente l'equazione (0.2). Purtroppo tale limitazione non è stata trovata. Si cerca allora di provare per altra via che  $\bar{v}$  verifica (0.2). La dimostrazione di tale fatto richiede di una tecnica dimostrativa sviluppata in Chiti-Longinetti [5]; Per comodità del lettore se ne riporta una breve sintesi. Quando si ha una funzione quasi convessa  $v$  si è visto come ad ogni linea convessa di livello  $u = t$  vi si può associare una funzione supporto  $h(\cdot, t)$  definita e periodica in  $[0, 2\pi]$ . Se  $u$  verifica l'equazione (0.2) e  $v$  è quasi convessa, regolare, cioè di classe  $C^2$ , con curvatura strettamente positivo e  $\nabla u \neq 0$  fuori dall'unico punto di massimo, allora allora la funzione supporto  $h(\theta, t)$  verifica nelle variabili  $(\theta, t)$  una equazione a derivate parziali, precisamente:

$$\left( -\frac{(p-1)h_{uu}}{h_t^{p+1}} - \lambda t^{p-1} \right) R + (p-1) \frac{h_{t\theta} + h_t^2}{h_t^{p+1}} = 0. \quad (3.1)$$

Per la dimostrazione di questa equazione si veda anche Longinetti [11]. Tale equazione è l'equazione di Eulero verificata dalle linee di livello di  $v$ . Viceversa se la funzione supporto  $h(\theta, t)$  è di classe  $C^2$  e soluzione di (3.1) allora la funzione  $v$  associata è soluzione di (0.2). Basta quindi provare che la funzione  $\bar{v}$  limite di una sottosuccessione di  $\{\hat{u}^{(r)}\}$  verifica suddette proprietà. Cioè basta provare che fissata una linea di livello  $\bar{v} = t$  la sua funzione supporto verifica la (3.1). Le minimanti  $\hat{u}^{(r)}$  hanno delle linee di livello con esplicite equazioni di Eulero come provato nell'ultima proposizione. Basterebbe provare che tali equazioni convergono alla (3.1). Nuovamente tale passaggio al limite presenta difficoltà se non si hanno informazioni sulle derivate seconde di  $\bar{v}$ , cioè che è lo stesso delle derivate parziali seconde di  $h(\theta, t)$ . Questo si potrebbe ricavarlo dalle funzioni supporto associate alla successione  $\{\hat{u}^{(r)}\}$ , ma in mancanza di limitazioni uniformi questo risulta

non possibile. Si utilizza allora un'argomentazione simile ma che fa uso della equazione di Eulero in forma debole associata alla (2.22). La convergenza di Kuratowskij delle  $\hat{u}^{(r)}$  permette di provare che tale equazione in forma debole converge all'equazione in forma debole associata alla (3.1). Questo è tecnicamente più complicato ma richiede meno ipotesi di regolarità sulla successione  $\{\hat{u}^{(r)}\}$  che sono state provate nella precedente sezione. Questo conclude la dimostrazione del Teorema 1.

## Bibliografia

- [1] Acker, A., *On the convexity of equilibrium plasma configurations*, Math. Methods. Appl. Sci. 3, 1981, pp. 435-443
- [2] Acker, A., Payne L.E., Philippin, G., *On the convexity of the level lines of the fundamental mode in the clamped membrane problem and the existence of the convex solutions in a related free boundary problem*, J. of Appl. Math. and Physics, 32 (1981), pp. 683-694.
- [3] Brascamp, H.J., Lieb, E.H., *On the extensions of the Brunn-Minkowski and Prekopa-Leindr theorems, including inequalities for log concave functions, and with an application to a diffusion equation*, Funct. Anal. 22 (1976), pp.366-389.
- [4] Caffarelli, L., Spruck, J., *Convexity properties of solutions to some classical variational problems*, Comm. in Partial Differential Equations 7(1), 1982, pp 1337-1379.
- [5] Chiti, G., Longinetti, M., *Differential Inequalities for Minkowski functionals* General Inequalities 6, Proceedings of Oberwolfach 1990, Birkhauser
- [6] Korevaar, N.J., *Convex solutions to non linear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. 32 (1983), 603-614.
- [7] Laurence, P., Stredulinsky, E., *A new approach to queer differential equations*, Comm. on Pure and Applied Math. 38 (1985), 334-355.
- [8] Laurence, P., Stredulinsky, E., *Sur la convexité des lignes de niveau de certaines solutions d'une classe d'équations semilinéaires non monotones*, Compte Rendues Acad. Sci. (1989).
- [9] Longinetti, M. *Compattezza di successioni quasi convesse equilimitate*. Boll. Un. Mat. Ital. 17-A (1980), pp. 338-344.
- [10] Longinetti, M. *Sulla convessità delle linee di livello di funzioni*

- armoniche*, Boll.Un. Mat. Ital. 2A(1983), pp.71-76.
- [11] Longinetti, M. , *Some isoperimetric inequalities for the level curves of capacity and Green's functions on convex plane domains*  
SIAM J.Math. Anal. 19(1988) pp. 377-389
- [12] Sakaguchy, S. , *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems*, Ann. Scuola Normale Superiore , (1988).